Cvičení z matematické analýzy I

Matěj Novotný

5.1.2012

Úlohy na cvičení

G1 Zderivujte následující funkce, určete definiční obory derivací a spočtěte jednostranné derivace všude, kde existují.

$$a)\ f(x) = |x^2 - 7x + 10|, \quad b)\ f(x) = \log|4 - x^2|, \quad c)\ f(x) = e^{\arcsin 2x}, \quad d)\ f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x).$$

$$e)\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{pro } x < 0 \\ x^2 e^x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}, \quad f)\ f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{pro } x < \pi \\ 2(x - \pi) & \text{pro } x \geq \pi \end{cases}.$$

G2 Vyšetřete průběhy následujících funkcí.

$$a)\ f(x) = x^4 - 6x^2 + 2, \quad b)\ f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}, \quad c)\ f(x) = x + \frac{2}{x}, \quad d)\ f(x) = x^x.$$

$$e)\ f(x) = (x - 2)e^{\frac{1}{x}}, \quad f)\ f(x) = 2x^2 e^{-x}, \quad g\ )f(x) = 2x^2 - \log x, \quad h)\ f(x) = \log(\frac{1 - x}{1 + x}),$$

$$i)\ f(x) = x\sqrt{1 - x^2}, \quad j)\ f(x) = \arctan\frac{1 + x}{x - 1}, \quad k)\ f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2},$$

$$l)\ f(x) = (\sin x)^{\cos x}, \quad m)\ f(x) = \log|\tan\frac{x}{4}|, \quad n)\ f(x) = (|2x|)^{|2x|}, \quad o)\ f(x) = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})},$$

$$p)\ f(x) = \sqrt{(x - 1)(x - 2)}, \quad q)\ f(x) = \frac{x}{\log x}, \quad r)\ f(x) = \log(|x| - x^2), \quad s)\ f(x) = \exp(-\frac{1}{1 - x^2}).$$

Jde o následující:

1. Nalézt maximální definiční obor.
2. Nalézt obor spojitosti.
3. Nalézt prusečíky se souřadnými osami.
4. Vyšetřit paritu a periodicitu.
5. Určit limity v krajních bodech definičního oboru a bodech nespojitosti.
6. Nalézt intervaly monotonie, určit případné lokální a globální extrémy včetně funkčních hodnot.
7. Nalézt intervaly konvexity a konkavity. Určit případné inflexní body včetně funkčních hodnot.
8. Pokud existují, nalézt asymptoty v $\pm\infty$.
9. Načrtnout graf funkce, určit obor hodnot.
10. Zkontrolovat řešení na `http://www.wolframalpha.com`. Stačí zadat "plot $f(x)$"a z obrazku ověřit, zda vedl výpočet alespoň k rámcově podobnému výsledku. Případně lze nechat funkci derivovat příkazem "$f'(x)$".